DETERMINANTES

Solo se puede calcular el determinante de matrices cuadradas.

Orden 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \cdot d - b \cdot c)$$

Orden 3

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (a \cdot e \cdot i + b \cdot f \cdot g + c \cdot d \cdot h) - (c \cdot e \cdot g + b \cdot d \cdot i + a \cdot f \cdot h)$$

Determinante de una matriz de cualquier orden

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & p & q \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a \begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & p & q \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot b \begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & p & q \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot c \begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & q \end{vmatrix} + (-1)^{1+4} \cdot d \begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

Se puede desarrollar el determinante de una matriz a partir de cualquier fila o columna. Lo más aconsejable es elegir aquella fila o columna con mayor cantidad de ceros ya que ayudará a simplificar los cálculos.

Propiedades de los determinantes:

1. Si una matriz tiene una fila o una columna de ceros, su determinante es cero.
2. Si una matriz tiene dos filas o dos columnas iguales o proporcionales, su determinante es cero.
3. Si una matriz tiene una fila que es combinación lineal de otras dos filas de la misma, su determinante es cero.
4. Si en una matriz se intercambian dos filas o dos columnas, el determinante cambia de signo.
5. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta.
6. Si una matriz A tiene inversa, se verifica que $|A^{-1}| = \dfrac{1}{|A|}$.
7. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
8. Si una fila o columna de una matriz se multiplica por un número, también se multiplica el determinante de la matriz por dicho número.
9. $\begin{vmatrix} C_1 & C_2 + C_2' & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1 & C_2' & C_3 \end{vmatrix}$

Aplicaciones de los determinantes:

1. Cálculo del rango de una matriz. El rango de una matriz A se corresponde con el orden del menor de mayor dimensión cuyo determinante sea distinto de cero. Así, si una matriz de orden 3 tiene determinante distinto de cero, podremos afirmar que tiene rango 3. Si, por contra, su determinante es igual a cero tendremos que estudiar si contiene algún menor de orden 2 distinto de cero (rango (A) = 2) o de orden 1, en caso de no encontrarlo de orden 2.

2. Cálculo de la inversa de una matriz. $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t$ donde Adj (A) es la matriz de adjuntos de A.

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & p & q \end{vmatrix} & (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} e & g & h \\ i & k & l \\ m & p & q \end{vmatrix} & (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & q \end{vmatrix} & (-1)^{1+4}\begin{vmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & p \end{vmatrix} \\ (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & p & q \end{vmatrix} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

3. Estudio de la existencia de inversa de una matriz. Una matriz cuadrada tiene inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Así, para estudiar si una matriz tiene inversa, hacemos su determinante. Si este tiene como resultado un número distinto de cero, podremos afirmar que la matriz tiene inversa. Si el determinante es nulo, diremos que la matriz correspondiente no tiene inversa.